Abszolútértékes és gyökös kifejezések
Megoldások

1) Igazolja, hogy az alábbi négy egyenlet közül az a) és b) jelű egyenletnek pontosan egy megoldása van, a c) és d) jelü egyenletnek viszont nincs megoldása a valós számok halmazán!

a) $\frac{2x^2+x-10}{2^{x-1}-2}=0$ **(4 pont)**

b) $\sqrt{x+16}+\sqrt{x-9}=5$ **(4 pont)**

c) $\lg\left(x^2+x-6\right)=\lg\left(1-x^2\right)$ **(4 pont)**

d) $\sin x-1=\sqrt{\lg\left(\cos^2 x-1,5\cos x\right)}$ **(4 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Bizonyítások 13. feladat, Exponenciális és logaritmusos feladatok 1. feladat*

b) A rendezés után kapott $\sqrt{x+16}=5-\sqrt{x-9}$ egyenletet mindkét oldalról négyzetre emelve, (1 pont)

rendezés után kapjuk, hogy $10\sqrt{x-9}=0$ (1 pont)

Innen $\boldsymbol{x=9}$ (1 pont)

Behelyettesítéssel ellenőrizve ez jó megoldás. (1 pont)

c) *Lásd: Bizonyítások 13. feladat, Exponenciális és logaritmusos feladatok 1. feladat*

d) A jobb oldali kifejezés az értelezési tartományán csak nem negatív lehet, így $\sin x-1\geq 0$. (1 pont)

Ez csak $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ esetén teljesül (1 pont)

De mivel $\cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=0$ minden $k\in\mathbb{Z}$ esetén (1 pont)

és nullára a logaritmus nincs értelmezve, **így nincs olyan valós szám, amelyre az egyenlet értelmezve lenne, így nincs megoldása.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

2) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

a) $(x-2)\cdot\lg\left(x^2-8\right)=0$ **(5 pont)**

b) $x^2-|x|=6$ **(5 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Exponenciális és logaritmusos feladatok 2. feladat*

b) Ha $x\geq 0$, akkor az egyenlet 0-ra redukált alakja $x^2-x-6=0$; ha $x<0$, akkor a megoldandó egyenlet: $x^2+x-6=0$ (1 pont)

1. eset: ($x^2-x-6=0,\ x\geq 0$). Az egyenlet gyökei: $x_1=3$; $x_2=-2$ (1 pont)

Csak az $x_1=3$ megoldása az egyenletnek az $x\geq 0$ feltétel miatt (1 pont)

2. eset: ($x^2+x-6=0,\ x<0$). Az egyenlet gyökei: $x_1=2$; $x_2=-3$ (1 pont)

Csak az $\boldsymbol{x_2=-3}$ megoldása az egyenletnek az $x<0$ feltétel miatt (1 pont)

Összesen: 10 pont

3) a) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$x^2 = |x-6|$$ **(5 pont)**

b) Oldja meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} \lg(x+y) &= 2\lg x \\ \lg x &= \lg 2 + \lg(y-1) \end{aligned}\right\}$$ **(9 pont)**

Megoldás:

a) 1. eset: $x^2 + x - 6 = 0,\ x < 6$ (1 pont)

ennek valós gyökei 2 és -3 (1 pont)

Ezek megoldásai az eredeti egyenletnek (1 pont)

2. eset: $x^2 - x + 6 = 0,\ x \geq 6$ (1 pont)

ennek nincs valós megoldása (1 pont)

Tehát az egyenlet megoldásai a **–3** és a **2**.

b) *Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 1. feladat, Exponenciális és logaritmusos feladatok 5. feladat*

Összesen: 14 pont

4) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-3} = 2$$ **(10 pont)**

Megoldás:

Megoldást csakis az $x^2 \geq 3$ feltételnél kereshetjük (1 pont)

Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát!

$$x^2 + 1 + 2\sqrt{(x^2+1)(x^2-3)} + x^2 - 3 = 4$$ (2 pont)

Rendezés után: $\sqrt{(x^2+1)(x^2-3)} = 3 - x^2$ (2 pont)

A baloldali kifejezés nem negatív, ezért a jobboldali kifejezés is nem negatív kell, hogy legyen (1 pont)

ezért $x^2 \leq 3$ feltételnek fent kell állnia. (1 pont)

A kezdeti feltétellel összevetve, csak $x^2 = 3$ teljesülhet (1 pont)

Visszahelyettesítés után látjuk, hogy $x^2 = 3$ kielégíti az egyenletet (1 pont)

Innen a két gyök: $\boldsymbol{x_1 = \sqrt{3},\ x_2 = -\sqrt{3}}$ (1 pont)

Összesen: 10 pont

5)

a) Mely valós számok elégítik ki az alábbi egyenlőtlenséget?

$$(x-1)^3 - (x+1)^3 > -8$$ **(4 pont)**

b) Az alábbi f és g függvényt is a $[-3;6]$ intervallumon értelmezzük.

$$f(x) = \sqrt{x+3} \text{ és } g(x) = -0{,}5x + 2{,}5.$$

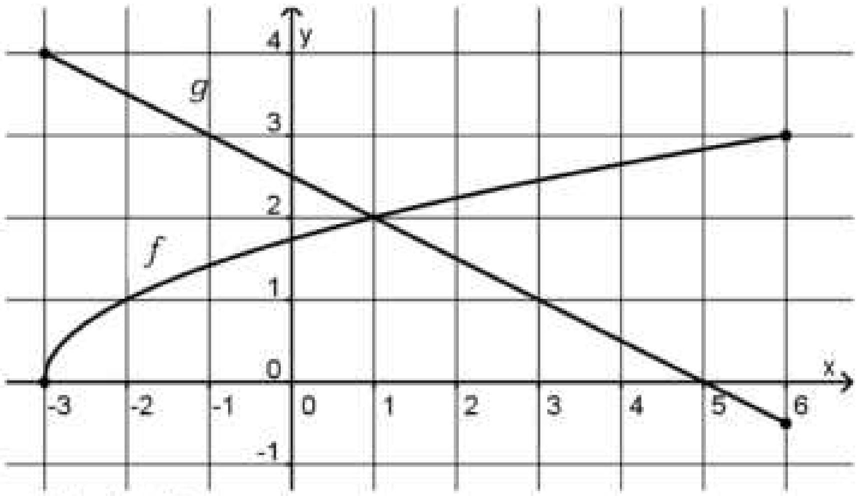
Ábrázolja közös koordináta-rendszerben az f és g függvényt a $[-3;6]$ intervallumon! Igazolja számítással, hogy a két grafikon metszéspontjának mindkét koordinátája egész szám! **(4 pont)**

c) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$0{,}5x + \sqrt{x+3} \leq 2{,}5$$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 2. feladat* b)



f függvény helyes ábrázolása (2 pont)
g függvény helyes ábrázolása (1 pont)
a metszéspont koordinátái $(\mathbf{1;2})$ (1 pont)

c) A megoldandó egyenlőtlenség ekvivalens a $\sqrt{x+3} \leq -0,5x+2,5$ egyenlőtlenséggel (1 pont)
A bal oldal nem negatív (1 pont)
a jobb oldal 5-nél nagyobb *x*-ekre negatív (1 pont)
Az egyenlőtlenség megoldásait a $[-3;6]$ intervallumon a b) részben ábrázolt *f* és *g* függvényekről leolvashatjuk (1 pont)
A megoldáshalmaz a $[\mathbf{-3;1}]$ intervallum (2 pont)

Összesen: 14 pont

6) a) Ábrázolja a derékszögű koordinátarendszerben az $f:[0;5] \to \mathbb{R}, f(x) = |x^2-4x+3|$ függvényt! (5 pont)

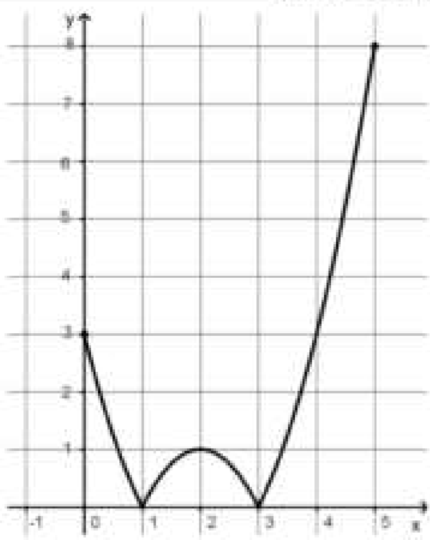
b) Tekintsük az $|(x-2)^2-1| = k$ paraméteres egyenletet, ahol k valós paraméter. Vizsgálja a megoldások számát a k paraméter függvényében! (7 pont)

c) Ábrázolja a megoldások számát megadó függvényt a $k \in]-6;6[$ intervallumon! (2 pont)

d) Adja meg a c)-beli függvény értékkészletét! (2 pont)

Megoldás:

a) $f(x) = |x^2-4x+3| = |(x-2)^2-1|$ (1 pont)
Az $y=(x-2)^2-1$ parabola tengelypontja $(2;-1)$ (1 pont)
az *x* tengelyt az $(1;0)$ és $(3;0)$ pontokban metszi (1 pont)
Jó ábrázolás, leszűkítés a $[0;5]$ intervallumra (1 pont)
Az abszolút érték figyelembevétele (1 pont)
Helyes ábra:



b) *Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 4. feladat, Paraméter 8. feladat*
c) *Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 4. feladat*
d) *Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 4. feladat*

Összesen: 16 pont

7) Az alábbi három kifejezés mindegyike esetén adja meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a kifejezés értelmezhető!

a) $\cos\left(\log_2 \sqrt{x}\right)$ **(3 pont)**

b) $\sqrt{\log_2(\cos x)}$ **(5 pont)**

c) $\log_{\sqrt{x}}\left(\cos^2 x\right)$ **(5 pont)**

Megoldás:

a) A négyzetgyök miatt $x \geq 0$ (1 pont)

A logaritmus miatt $\sqrt{x} > 0$ (1 pont)

A keresett halmaz: $]0;+\infty[$ (1 pont)

b) A logaritmus miatt $\cos x > 0$ (1 pont)

A négyzetgyök miatt $\log_2(\cos x) \geq 0$ (1 pont)

azaz $\cos x \geq 1$ (1 pont)

A koszinusz függvény értékkészlete miatt $\cos x = 1$ (1 pont)

Az értelmezési tartomány tehát $\{x \in \mathbb{R} \mid x = k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ (1 pont)

c) A logaritmus alapjai miatt $x > 0$ és $x \neq 1$ (1 pont)

A logaritmus miatt $\cos^2 x > 0$ (1 pont)

Tehát $\cos x \neq 0$ (1 pont)

$x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ahol $k \in \mathbb{Z}$ (1 pont)

Az értelmezési tartomány tehát

$\mathbb{R}^+ \setminus \left(\{1\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right\}\right)$ **ahol** $k \in \mathbb{N}$ (1 pont)

Összesen: 13 pont

8) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\sqrt{x+2} = -x$ **(4 pont)**

b) $2^{2(x-1)(x+4)} = 4^{\frac{x-1}{x+4}}$ $(x \neq -4)$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) A négyzetgyök függvény értelmezési tartománya és értékkészlete miatt: $x \in [-2;0]$ (1 pont)

Négyzetre emelés után: $x + 2 = x^2$ (1 pont)

Az $x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet gyökei: 2 és -1. (1 pont)

Közülük csak a **−1** eleme a fenti intervallumnak (és az átalakítások ezen az intervallumon ekvivalensek), ezért ez az egyetlen megoldás. (1 pont)

(A grafikus módszerrel való megoldásért szintén maximális pontszám jár)

b) *Lásd: Exponenciális és logaritmusos feladatok 10. feladat*

Összesen: 11 pont

9) Jelölje *H* a $\sqrt{5,2 - x} \leq 3$ egyenlőtlenség pozitív egész megoldásainak halmazát. Jelölje továbbá *B* azon pozitív egész *b* számok halmazát,

amelyekre a $\log_b 2^6$ kifejezés értéke is pozitív egész szám. Elemeinek felsorolásával adja meg a H, a B, a $H \cap B$ és a $B \setminus H$ halmazt! (11 pont)

Megoldás:

A gyökös kifejezés értelmezési tartomány vizsgálata alapján: $x \le 5{,}2$. (1 pont)

Az egyenlőtlenség elvégzése során:

$5{,}2 - x \le 9 \Rightarrow -3{,}8 \le x$ (1 pont)

Tehát azok a pozitív számok elemei H halmaznak, melyek $-3{,}8$-nál nagyobbak és 5,2-nél kisebbek:

$\boldsymbol{H = \{1;2;3;4;5\}}$ (1 pont)

Ha $\log_b 2^6 = k$, akkor $b^k = 2^6$, ami 64. (2 pont)

A k kitevő pozitív egész, ezért a b olyan pozitív egész szám lehet, melynek valamely pozitív egész kitevős hatványa 64-gyel egyenlő: (1 pont)

$2^6 = 4^3 = 8^2 = 64^1 = 64$ (2 pont)

Ezért $\boldsymbol{B = \{2;4;8;64\}}$. (1 pont)

$\boldsymbol{H \cap B = \{2;4\}}$ (1 pont)

$\boldsymbol{B \setminus H = \{8;64\}}$ (1 pont)

Összesen: 11 pont

10) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\boldsymbol{\sin x - \cos^2 x = -1}$ **(6 pont)**

b) $\boldsymbol{|x - |x|| = 2x + 1}$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Trigonometria 11. feladat*

b) Ha $x \ge 0$, akkor $|x| = x$. (1 pont)

Ekkor $0 = 2x + 1$, ahonnan $x = -\frac{1}{2}$, (1 pont)

de ez $x \ge 0$ miatt nem megoldás. (1 pont)

Ha $x < 0$, akkor $|x| = -x$, (1 pont)

és az egyenlet $|2x| = 2x + 1$. (1 pont)

Mivel $x < 0$ ezért $-2x = 2x + 1$, azaz $\boldsymbol{x = -\frac{1}{4}}$ (1 pont)

Ellenőrzés... (1 pont)

Összesen: 13 pont

11) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\boldsymbol{\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} + \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} = 324}$ **(6 pont)**

b) $\boldsymbol{\sqrt{6x - 24} = \sqrt{2x - 7} - 1}$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Exponenciális és logaritmusos feladatok 15. feladat*

b) Értelmezési tartomány: $x \ge 4$.

Ezen halmazon mindkét oldal nemnegatív, így a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás. (1 pont)

$6x-24=2x-7+1-2\sqrt{2x-7}$ (1 pont)

$2\sqrt{2x-7}=18-4x$ (1 pont)

$\sqrt{2x-7}=9-2x$

A négyzetre emelés akkor ekvivalens, ha $x\le 4,5$. (1 pont)

$2x-7=81-36x+4x^2$

$4x^2-38x+88=0$ (1 pont)

A másodfokú egyenlet gyökei $x=4$ és $x=5,5$. (1 pont)

Az 5,5 nem eleme az értelmezési tartománynak, azonban a 4 igen,
Így a megoldás az $\boldsymbol{x=4}$. (1 pont)

Összesen: 13 pont

12) Oldja meg az alábbi két egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

a) $\cos x \ge \frac{1}{2}$ **(3 pont)**

b) $\sqrt{\frac{x}{5}-4}<20$ **(4 pont)**

c) Hány olyan egész szám van. amelyik gyöke az alábbi egyenlőtlenségnek?

$\log_{0,5}(2x+100)\ge -8$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Trigonometria 13. feladat*

b) Értelmezési tartomány: $x\ge 20$. (1 pont)

Négyzetre emelve (az értelmezési tartomány okán ekvivalens átalakítás):

$\frac{x}{5}-4<400$. (1 pont)

$x<2020$ (1 pont)

Az értelmezési tartománnyal összevetve tehát az egyenlőtlenség megoldása: $\boldsymbol{20\le x<2020}$. (1 pont)

c) *Lásd: Exponenciális és logaritmusos feladatok 16. feladat*

Összesen: 14 pont

13) a) Határozza meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a $\sqrt{x^2-6x+9}$ kifejezés értelmezhető! (2 pont)

b) Ábrázolja a $[-5;8]$ intervallumon értelmezett $f: x\mapsto \sqrt{x^2-6x+9}$ függvényt! (5 pont)

c) Melyik állítás igaz és melyik hamis a fenti függvényre vonatkozóan? Válaszát írja a sor végén lévő téglalapba! (Az indoklást nem kell leírnia.)

A: Az *f* értékkészlete: $[0;5]$

B: Az *f* függvény minimumát az $x=-3$ helyen veszi fel.

C: Az *f* függvény szigorúan monoton nő a $[4;8]$ intervallumon.

(3 pont)

A	
B	
C	

d) Határozza meg az $\int_{-3}^{3}(x^2-6x+9)\,dx$ értékét! (6 pont)

Megoldás:

a) $x^2-6x+9=(x-3)^2$ (1 pont)

Mivel ez minden valós x értékre nem negatív, ezért a legbővebb részhalmaz az $\mathbb{R}$. (1 pont)

b) *Lásd: Függvények – Analízis 5. feladat*

c) *Lásd: Függvények – Analízis 5. feladat*

d) *Lásd: Függvények – Analízis 5. feladat*

Összesen: 16 pont

14) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{-2x+6}=x+1$ **(5 pont)**

b) $2\log_4 x^2+3\log_4 x^3=\log_4 x^4+\log_4 8^9$ **(5 pont)**

Megoldás:

a) A négyzetgyök értelmezési tartománya és értékkészlete:

$-1\le x\le 3$. (1 pont)

A kifejezést négyzetre emelve

$-2x+6=x^2+2x+1$ egyenletet kapjuk. (1 pont)

Átrendezve: $x^2+4x-5=0$. (1 pont)

A másodfokú egyenlet gyökei $x_1=-5$ és $x_2=1$. (1 pont)

Az $x_1=-5$ nem eleme az értelmezési tartománynak,

így a megoldás $\boldsymbol{x_2=1}$. (1 pont)

b) *Lásd: Exponenciális és logaritmusos feladatok 17. feladat*

Összesen: 11 pont